Bibliographie.

Woyciechowsky József, Sipos Pál élete és matematikai munkássága, 124 oldal, Budapest, Athenaeum Irodalmi-és Nyomdai R.-T., év nélkül.

[**Josef v. Woyciechowsky, Paul Sipos,** ein ungarischer Mathematiker des ausgehenden 18. Jahrhunderts, über seine Ellipsenrektifikation mittels Kochleoide und seine alleinstehenden logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, mit unveröffentlichten Briefen von BODE und KÄSTNER, 124 S., Budapest, Athenaeum.]

PAUL SIPOS, „der erste ungarische Mathematiker dessen selbständige und auf der Höhe seiner Zeit stehende Abhandlung bekannt ist", ist im Jahre 1759 zu Nagyenyed geboren, studierte dortselbst, wurde Rektor des Partikel-Kollegiums zu Szászváros; er setzte dann seine mathematischen und theologischen Studien in Frankfurt a. O., in Wien und wahrscheinlich auch in Göttingen fort; in 1793 ist er zum Adjunkten der kgl. Gelehrten Gesellschaft der Wissenschaften zu Frankfurt a. O. ernannt worden. In 1796 ist seine Abhandlung: *Beschreibung und Anwendung eines mathematischen Instruments für die Mechaniker, zur unmittelbaren Vergleichung der Circulbogen* in der Sammlung deutscher Abhandlungen der Berliner Akademie (Jahrgang 1790—91, Anhang, S. 201—230) erschienen; die Arbeit wurde durch eine goldene Medaille belohnt. Nach seinem Heimat zurückgekehrt, wirkte er wieder in Szászváros und später an der Hochschule zu Sárospatak als Professor; die letztere verdankt ihm einen vorzüglichen Lehrplan für Mathematik. In 1810 schied er aus dem Lehramt, um in Tordos als reformierter Prediger zu wirken; er starb in 1816 in Bábolna.

Seine oben erwähnte Arbeit „Beschreibung..." ist die erste Publikation über die jetzt unter dem Namen Kochleoide bekannte Kurve, die man daher als Sipos-Kurve bezeichnen sollte. Er verwendet diese Kurve zur Lösung gewisser Aufgaben, wie Rektifikation des Kreisbogens und Winkelteilung. Ferner gibt er mittels derselben eine mechanische (d. h. angenäherte) Konstruktion der Ellipsenlänge an, die der Näherungsformel

$$S = 4\,\frac{(a+b)^3}{(a-b)^2}\cos\frac{\pi\sqrt{ab}}{a+b}$$

für den Umfang der Ellipse mit den Halbachsen a, b entspricht. WOYCIECHOVSKY zeigt, daß diese Formel, nach Potenzen der Exzentrizität ε entwickelt, bis zum Potenz ε^6 mit der entsprechenden Entwicklung des genauen Umfangs übereinstimmt und auch im Koeffizienten des nächstfolgenden Gliedes eine sehr kleine Abweichung aufweist, eine Genauigkeit, die, wie es der Verfasser durch sorgfältige Zusammenstellung und Vergleichung von 38 Näherungsformeln zeigt, vor SIPOS nicht erreicht und auch seitdem nur durch wenige (und viel kompliziertere) Formeln übertroffen wurde.

Erwähnenswert sind noch die interessant eingerichteten Tabellen von SIPOS für die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen kleiner Winkeln, wobei er als erster in Ungarn die Dezimalteilung der Winkeln gebraucht.

WOYCIECHOWSKY hat durch Aufsuchen der — im Buch durchwegs zitierten — Quellen, darunter von zwei, zuerst hier abgedruckten Briefen an SIPOS (vom Berliner Astronomen BODE und vom Göttinger Mathematiker KÄSTNER), treffliches geleistet. Ein ausführlicher Auszug in deutscher Sprache, unter dem oben in [ ] angegebenen Titel, macht den wesentlichen Inhalt einem weiteren Leserkreis zugänglich.

L. Kalmár.

Veress Pál, Valós függvények, 175 oldal, Budapest, „Studium" Könyvkereskedelmi és Könyvkiadó R.-T., 1934.

[**Paul Veress, Fonctions réelles,** 175 pages, Budapest, édition „Studium", 1934.]

Jusqu'à ces derniers jours il n'existait aucune monographie en langue hongroise sur ce qu'on appelle d'habitude la théorie des fonctions de variables réelles. Il faut remercier M. VERESS d'avoir tâché de combler cette lacune en réunissant, dans le présent volume, les leçons sur le sujet qu'il a données à l'Université de Budapest. Loin d'être complet, mais présentant d'une façon très claire tout ce qu'il contient et portant jusqu'à des régions élevées, le livre pourra rendre de bien bons services à tous ceux qui n'y voient qu'une première introduction initiant à la lecture des monographies détaillées et des mémoires originaux.

Voici un résumé des matières. Au premier chapitre sont développés ceux des faits concernant les ensembles dont on aura besoin au cours du livre, parmi lesquels un théorème sur les suites infinies d'assertions, du à l'auteur et dont celui se sert pour unifier plusieurs problèmes d'allure différente. Au second chapitre sont discutées la convergence uniforme et la convergence quasiuniforme, les fonctions à variation bornée, la continuité absolue, la semicontinuité et les classes de BAIRE. La troisième donne une première introduction à la théorie des intégrales de LEBESGUE. Enfin, au quatrième chapitre sont esquissés les faits principaux concernant les espaces abstraits, avec quelques applications à des problèmes particuliers.

F. R.

Joseph Fels Ritt, Differential Equations form the Algebraic Standpoint (American Math Society Colloquium Publications, Volume XIV), X + 172 pages, New York, American Mathematical Society, 1932.

This volume represents the principal results of the author's researches in the field of algebraic differential equations. It constitutes volume XIV of the well-known Colloquium Series of the American Mathematical Society.

We shall analyse briefly some of the salient features of the results here expounded. For a more detailed resume of the subjects treated we refer the reader to the introduction of the book. Our operations have as background a field of functions of x (for simplicity we deal with one independent variable at the present) closed under the operation of differentiation. Let $F(x;\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n)$ be any polynomial in the unknowns y_j and their derivatives with coefficients in this field. By equating to zero the members of a system of such polynomials we obtain a system of algebraic differential equations. The notion of solution of a system is defined and it is proved that every system contains a finite subsystem whose solutions are precisely those of the original system.

It is quite evident that the notion of reducibility plays a central role in this work. As a matter of fact, the definition introduced delimits and forecasts the development of the whole theory. We shall briefly explain it here. Let $\Gamma = 0$ symbolize a differential system and $A = 0$, $B = 0$ be two equations of the type described earlier. $\Gamma = 0$ is said to be irreducible if for every pair A, B which has the property that AB vanishes for every solution of $\Gamma = 0$, either A or B vanishes for every solution of $\Gamma = 0$. With this definition, the author proves the fundamental theorem that every system can be decomposed into a finite number of irreducible systems. This decomposition is unique in the sense that any two decompositions contain the same number of indecomposable systems which can be paired off so that the systems in each pair define the same solutions.

In chapter II the notion of general solution of a differential equation is introduced. It is proved that it corresponds to one of the irreducible manifolds to which the equation gives rise. The solution of a system of more than one equation is also studied and is reduced by interesting devices to that of one equation, the resolvent of the system.

In later chapters, among other things, we find applications of this general theory; a special treatment of purely algebraic systems (that is systems involving no derivatives); the existence theorems which form the basis of the whole theory are analysed more closely and methods are given for the construction of the entities in question in a finite number of steps; analogues are given for the HILBERT—NETTO nullstellensatz and LÜROTH's theorem on the parametrization of unicursal curves. In the last two chapters the theory of partial differential equations is studied; the corresponding principal theorems can be deduced here but the generalization is by no means immediate. For the purposes of this study, the existence theorem of RIQUIER on so-called passive orthonormal systems is derived.

The material presented presupposes no more than an elementary knowledge of algebra and analysis. This frees the reading from annoying cross-references. On the other hand, some of the arguments presented, especially elimination processes, will necessarily call for perseverance. But if we take a bird's-eye view of the theory we are impressed with a wholesome feeling of its completeness as well as with mounting surprise that previous to this publication this rich field had been so largely neglected.

E. R. Lorch.

Stanislaw Saks, Théorie de l'intégrale, avec une note de STEFAN BANACH (Monografje Matematyczne, Tom II), VIII + 290 pages, Warszawa, Seminarjum Matematyczne, 1933.

Le présent volume des „Monographies Mathématiques" réunit presque tous les chapitres de cette branche de l'Analyse moderne dont après tant d'années l'importance n'a plus besoin d'être accentuée. Il faut louer le comité de rédaction d'avoir confié cette tâche à M. SAKS qui a enrichi et simplifié la plupart de ces chapitres par ses contributions personnelles, parmi lesquelles, pour ne citer que les principales, ses recherches concernant la dérivation des fonctions d'intervalle, la comparaison des quatre nombres dérivés des fonctions les plus générales et la classification en une hiérarchie des diverses notions d'intégrale.

Les chapitres I—V sont consacrés, après quelques préliminaires concernant les fonctions à variation bornée et celles de figure qui les généralisent au cas de plusieurs variables, à l'intégrale de LEBESGUE, avec des applications sur la théorie des courbes rectifiables. Le chapitre VI traite de l'aire d'une surface courbe $z = w(x, y)$ et de l'intégration des fonctions d'intervalle. Suivent, dans les chapitres VII—X, les intégrales de PERRON et de DENJOY et une discussion très détaillée des diverses généralisations des fonctions absolument continues et de celles à variation bornée ainsi que des fonctions caractériées par les conditions de LUSIN et BANACH. Le dernier chapitre se compose de deux parties indépendantes, l'une embrassant les recherches de MM. RADEMACHER, STEPANOFF et HASLAM-JONES concernant l'existence de la différentielle totale et de la différentielle approximative des fonctions de plusieurs variables que l'auteur a su compléter par ses contributions personnelles, tandis que la seconde contient, à titre d'application des méthodes de BAIRE—LEBESGUE à la théorie des fonctions analytiques, les théorèmes de MM. LOOMANN et MENCHOFF élargissant les conditions classiques d'holomorphie. Une annexe traite de l'intégrale dans les espaces abstraits. Enfin une note, redigée par M. BANACH, expose, sous une forme légèrement généralisée, le dernier travail accompli par notre collègue A. HAAR avant sa mort prématurée, sa belle et importante théorie de la mesure dans des groupes continues.

La structure du livre entier ainsi que l'exposition des détails sont des meilleures.

F. R.

Ernst Steinitz, Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluß der Elemente der Topologie, aus dem Nachlaß herausgegeben und ergänzt von HANS RADEMACHER (Grundlehren der math. Wisscnschaften, Band XLI), VIII + 351 S., Berlin, J. Springer, 1934.

Die Grundlage dieses vorzüglichen Buches ist ein unvollendetes Manuskript von STEINITZ, das vom Herausgeber in bester Weise ergänzt und mit zahlreichen Figuren versehen wurde. Das so entstandene Buch zeigt eine klare, systematische und sorfältige Darstellung und enthält eine ganze Reihe der vorher unbekannten eigenen Resultate von STEINITZ. Wir sind eines Sinnes mit dem Herausgeber, „daß das nachgelassene Werk der mathematischen Öffentlichkeit zugänglich gemacht werden mußte, nicht nur aus Pietät vor dem Namen STEINITZ, sondern vor allem auch seiner inneren Qualität und Eigentümlichkeit halber".

Den eingehenden Spezialuntersuchungen der Werke von BRÜCKNER, CHR. WIENER und V. EBERHARDT gegenüber hat das vorliegende Werk jene allgemeine Theorie der Polyeder vor Augen gehalten, die man auch als Morphologie der Polyeder bezeichnet. Es handelt sich also um die Lehre von topologischen Typen der Polyeder. Die Extremalprobleme und die Theorie der regulären Polyeder wurden aber außer Acht gelassen. — Im ersten Teil gibt das Buch eine historische Übersicht über den Eulerschen Polyedersatz und über seine Entwicklung und Ausgestaltung. Der zweite Teil enthält rein kombinatorische Betrachtungen über die Schemata, die aus Elementen von dreierlei Art: Ecken, Kanten und Flächen bestehen. Aus diesen Untersuchungen folgt, daß die konvexen Polyeder von einem besonderen topologischen Typus sind, der von STEINITZ als „K-Polyeder" bezeichnet wird. Der dritte Teil des Buches enthält drei Beweise des „Fundamentalsatzes der konvexen Typen", nach welchem jedes schematisch-topologisch gegebenes K-Polyeder als konvexes Polyeder realisiert werden kann. Der dritte Beweis führt schließlich zum „Kontinuitätssatz der konvexen Typen", nach dem zwei konvexe Polyeder von gleichem Typus sich unter Aufrechthaltung ihrer Konvexität und ihres Typus stetig ineinander überführen lassen.

J. v. Sz. Nagy.

David Hilbert, Gesammelte Abhandlungen, zweiter Band: Algebra, Invariantentheorie, Geometrie, VIII + 453 S. u. ein Bildnis, Berlin, J. Springer, 1933.

Der zweite Band Hilberts gesammelter Abhandlungen enthält seine Arbeiten über Algebra, Invariantentheorie und Geometrie. Die Anordnung der algebraischen Abhandlungen entspricht der Reihenfolge der Erscheinung, und zwar: 1. Über die invarianten Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen. 2. Über die notwendigen und hinreichenden kovarianten Bedingungen für die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständiger Potenz. 3. Über einen allgemeinen Gesichtspunkt für invariantentheoretische Untersuchungen im binären Formengebiete. 4. Über eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete. 5. Über die Singularitäten der Diskriminantenfläche. 6. Über binäre Formenbüschel mit besonderer Kombinanteneigenschaft. 7. Über binäre Formen mit vorgeschriebener Diskriminante. 8. Über die Diskriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe. 9. Lettre adressée à M. HERMITE. 10. Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten. 11. Über die Endlichkeit des Invariantensystems für binäre Grundformen. 12. Über Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Funktionaldeterminante. 13—15. Zur Theorie der algebraischen Gebilde I—III. 16. Über die Theorie der algebraischen Formen. 17. Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null (Zusammen mit A. HURWITZ). 18. Über die Irreduzibilität ganzer rationaler Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten. 19. Über die vollen Invariantensysteme. 20. Über ternäre definite Formen. 21. Ein Beitrag zur Theorie des Legendreschen Polynoms. 22. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen. 23. Über die Theorie der algebraischen Invarianten. 24. Über diophantische Gleichungen. 25. Über die Invarianten eines Systems von beliebig vielen Grundformen. 26. Über die Gleichung neunten Grades.

Diesen Abhandlungen folgt ein „Nachwort zu Hilberts algebraischen Arbeiten" von B. L. VAN DER WAERDEN. Von diesem knappen, aber gelungenen Nachwort stehe hier das folgende Zitat: „Von Hilberts algebraischen Arbeiten haben vorwiegend die Abhandlungen 16. „Über die Theorie der algebraischen Formen" und 19. „Über die vollen Invariantensysteme" einen umwälzenden Einfluß auf das algebraische Denken gehabt. Diese Arbeiten bilden den Abschluß von Hilberts invariantentheoretischen Untersuchungen; sie ragen aber in Methode und Bedeutung über den Bereich der Invariantentheorie weit hinaus. Ihr wesentlicher Kern, der in der zweiten Arbeit von HILBERT selbst bewußt formuliert wird, besteht in der Anwendung arithmetischer Methoden auf algebraischer Probleme... Indem HILBERT in diesen Abhandlungen den Invariantenkörper als Spezialfall eines Funktionenkörpers betrachtet, steht er am Wendepunkt einer historischen Entwicklung: Vor ihm war das Interesse der Algebraiker vorwiegend auf eine möglichst explizite Aufstellung aller Invarianten gegebener Grundformen gerichtet, nach ihm mehr auf die allgemeinen arithmetischen und algebraischen Eigenschaften von Systemen rationaler und algebraischer Funktionen. Aus diesem Gedankenkreis ist später in natürlicher Weise die allgemeine Theorie der abstrakten Körper, Ringe und Moduln erwachsen". Der Verfasser des Nachwortes bespricht dann die großen Erfolge, welche zahlreiche Forscher mit den Hilbertschen Methoden errungen haben. Die Besprechung endigt mit einem Verzeichnis der wichtigsten, durch HILBERT angeregten Arbeiten.

Das Werk „Grundlagen der Geometrie" wurde in diesem Band nicht abgedruckt, bis auf die Note „Über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung" aus dem „Anhang". Aber eine Übersicht „Zu Hilberts Grundlegung der Geometrie" von A. SCHMIDT reicht ein schönes Bild von den Hilbertschen Forschungen über die Grundlagen der Geometrie. Der Band enthält außerdem die geometrischen Abhandlungen Hilberts: Über die reellen Züge algebraischer Kurven. Über die Gestalt einer Fläche vierter Ordnung.

St. Lipka.

F. Bücking, Das bizentrische Viereck, eine Monographie, IV + 44 S. u. 6 Tafeln, Leipzig und Berlin, in Kommission bei B. G. Teubner, 1933.

Ein Viereck ist bizentrisch, wenn es Sehnenviereck in einem Kreise und zugleich Tangentenviereck an einen anderen Kreis ist. Die Mittelpunkte dieser beiden Kreise sind die Mittelpunkte des bizentrischen Vierecks. Zu einem bizentrischen Viereck gehört — nach dem bekannten Schließungssatz von PONCELET — eine unendliche Schar von bizentrischen Vierecken mit demselben Umkreis und Inkreis. Der Verfasser untersucht die verschiedenen, teilweise bekannten Eigenschaften des bizentrischen Vierecks mit elementargeometrischen Hilfsmitteln, besonders mit Hilfe von Inversionen. Ist p der Abstand der beiden Mittelpunkte, sind ferner ϱ bzw. r die Halbmesser des In- und Umkreises, so besteht zwischen p, ϱ und r eine Gleichung vierten Grades. Eine Hauptaufgabe ist diese Gleichung aufzustellen.

Der Verfasser hofft mit diesem Hefte besonders denen etwas zu bieten, die sich aus Liebhaberei mit Mathematik beschäftigen.

J. v. Sz. Nagy.

Ludwig Bieberbach, Vorlesungen über Algebra, unter Benutzung der dritten Auflage des gleichnamigen Werkes von GUSTAV BAUER in fünfter vermehrter Auflage dargestellt, X + 358 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1933.

Das vorliegende Buch ist eine zweite Auflage der Bieberbach—Bauerschen Algebra (Besprechung der ersten Auflage s. *diese Acta,* 4 (1928—29), S. 254). Der Verfasser legt in dieser Auflage ein größeres Gewicht auf die heutigen Gesichtspunkte der Algebra als in der ersten. Man findet in dem ersten Abschnitt unter anderen eine gute, besonders für den Anfänger bestimmte Einleitung in die moderne Körpertheorie. Dieser Abschnitt enthält auch den von GAUSZ, ARTIN und DÖRGE herrührenden Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Dieser Beweis ist, im Gegensatz zu den anderen, ein rein algebraischer Beweis dieses sogenannten funktionentheoretischen Satzes. Die übrigen Abschnitte zeigen nur unwesentliche Abänderungen gegenüber der ersten Auflage. Die Hinweise auf Originalarbeiten sind mit den neuesten ergänzt. Einige störende Druckfehler der ersten Auflage sind beseitigt.

St. Lipka.